Formule de Stirling

1) Equivalent de $\ln(n!)$ quand n tend vers $+\infty$.

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. On a $\ln(k-1) \leq \int_{k-1}^{k} \ln x \, dx \leq \ln k$. Puisque $\ln(k-1) \sim \ln k$ quand k tend vers $+\infty$, on a

$$\int_{k-1}^{k} \ln x \, dx \underset{k\to+\infty}{\sim} \ln k \geq 0.$$

Comme la série de terme général $\ln k$ diverge, la règle de l'équivalence des sommes partielles de séries à termes positifs divergentes permet d'affirmer que, quand n tend vers $+\infty$

$$\ln(n!) = \sum_{k=2}^{n} \ln k \sim \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln x \, dx = \int_{1}^{n} \ln x \, dx = n\ln n - n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln n.$$

Donc,

$$\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln n + o(n\ln n) \text{ ou encore } n! \underset{n\to+\infty}{=} n^n \times e^{o(n\ln n)}.$$

2/ Equivalent de Ln(n !)-nLnn .

Pour $n \geq 1$, posons $u_n = \ln(n!) - n\ln n = \sum_{k=1}^{n} \ln k - n\ln n$. Pour $n \geq 1$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \ln(n+1) - ((n+1)\ln(n+1) - n\ln n) = -n(\ln(n+1) - \ln n) = -n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -1.$$

D'après la règle de l'équivalence des sommes partielles de séries à termes positifs divergentes, on a :

$$u_n - u_1 = \sum_{k=1}^{n}(u_{k+1} - u_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n-1}(-1) = -(n-1),$$

ce qui fournit $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n - u_1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -(n-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n$.

$$\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln n - n + o(n) \text{ ou encore } n! \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{n}{e}\right) \times e^{o(n)}.$$

3/ Equivalent de Ln(n !)-nLnn+n .

Pour $n \geq 1$, posons $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln k - n\ln n + n$. Quand n tend vers $+\infty$

$$u_{n+1} - u_n = \ln(n+1) - ((n+1)\ln(n+1) - n\ln n) + 1 = 1 - n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 - 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n}.$$

Donc, la série de terme général u_n étant toujours divergente et u_n étant de signe constant pour n grand

$$u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) \underset{n}{\to +\infty} \sim u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} \underset{n}{\to +\infty} \sim \ln n \text{ (d'après l'étude de la série harmonique).}$$

Donc

$$\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + o(\ln n) \text{ ou encore } n! \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \times e^{o(\ln n)}.$$

4) Convergence de la suite $\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$.

Pour $n \geq 1$, posons $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln k - n\ln n + n - \frac{1}{2}\ln n$. Quand n tend vers $+\infty$,

© Jean-Louis Rouget, 2008. Tous droits réservés.

$$u_{n+1}-u_n = 1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = 1-1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi, la série de terme général $u_{n+1}-u_n$ converge et on sait qu'il en est de même de la suite (u_n).

Soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Alors, $\ln(n!) - n\ln n + n - \dfrac{1}{2}\ln n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + o(1)$ et donc,

$$\exists \ell \in \mathbb{R}/\ \ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \ell + o(1) \text{ ou encore, } \exists K \in]0,+\infty[/\ n! \underset{n\to+\infty}{\sim} K\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n} \text{ (en posant } K = e^{\ell}).$$

5) Détermination de K et formule de Sirling.

L'étude des intégrales de Wallis (à savoir $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t\ dt$, $n\in\mathbb{N}$) montre que

- d'une part, pour tout entier naturel n, $W_{2n} = \dfrac{\pi}{2}\times\dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}$
- d'autre part, quand n tend vers $+\infty$, $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

D'après 4), on a alors

$$\sqrt{\frac{\pi}{4n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{2n} = \frac{\pi}{2}\times\frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\times\frac{K\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2n}}{K^2 2^{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} n} = \frac{1}{K}\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}},$$

et donc $\dfrac{1}{K}\dfrac{\pi}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ ou encore $K = \sqrt{2\pi}$. On a ainsi montré que

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n} \text{ (formule de Stirling).}}$$

6) Equivalent de $\ln(n!) - n\ln n + n - \frac{1}{2}\ln n - \ln(\sqrt{2\pi})$.

D'après ce qui précède, si pour $n\geq 1$, $u_n = \ln(n!) - n\ln n + n - \dfrac{1}{2}\ln n$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + o(1)$ avec $\ell = \ln K = \ln(\sqrt{2\pi})$.

Comme $u_n = u_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)$, quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\ln(\sqrt{2\pi}) = u_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(u_{k+1}-u_k)$ puis, pour $n\geq 1$:

$$u_n - \ln(\sqrt{2\pi}) = \sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1}-u_k) - \sum_{k=1}^{+\infty}(u_{k+1}-u_k) = \sum_{k=n}^{+\infty}\left(1-\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right).$$

Maintenant, quand k tend vers $+\infty$, on a

$$1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{1}{4n^2}-\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\sim \frac{1}{12n^2} \sim \frac{1}{12n(n+1)} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

La règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes permet d'affirmer que

$$u_n - \ln(\sqrt{2\pi}) = \sum_{k=n}^{+\infty}(u_{k+1}-u_k) \sim \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{12n} \text{ (série télescopique).}$$

Donc

$$\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \ln(\sqrt{2\pi}) + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

ou encore

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right).}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2008. Tous droits réservés.